

# Transition frictionnelle/visqueuse pour une suspension granulaire

Christophe ANCEY<sup>a</sup>, Philippe COUSSOT<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Cemagref–division ETNA, Domaine universitaire, BP 76, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex, France

E-mail : christophe.ancey@grenoble.cemagref.fr

<sup>b</sup> LMSGC, UMR LCPC–CNRS 113, cité Descartes, 2, allée Képler, 77420 Champs-sur-Marne, France

(Reçu le 25 août 1998, accepté après révision le 17 novembre 1998)

---

**Résumé.** À partir d'une série d'expériences de cisaillement sur des suspensions de billes de verre dans différents fluides interstitiels, on montre qu'il y a une transition de comportement d'un régime frictionnel (aux faibles vitesses) à un régime visqueux (aux fortes vitesses). L'évaluation des différents types d'interactions montre qu'une telle transition est sans doute due à la lubrification des contacts sous l'effet du cisaillement. © Académie des sciences/Elsevier, Paris

*rhéologie / écoulement granulaire / comportement frictionnel*

## ***Transition from frictional to viscous regime for granular suspensions***

**Abstract.** *From a series of experiments performed on fluid-bead mixtures, we show that a transition occurs between a frictional regime (at low rates) and a viscous regime (at high rates). The examination of various interaction types demonstrates that such a transition is probably due to the shear-induced contact lubrication. © Académie des sciences/Elsevier, Paris*

*rheology / granular flow / frictional behaviour*

---

## ***Abridged English Version***

For concentrated suspensions of non-Brownian particles within a Newtonian fluid, the existence of various types of particle interactions gives rise to a complicated bulk behaviour. In this context, it is usual to consider three main types of interaction: collisional, frictional, and lubricated contacts. The predominance of one type of contact with respect to other ones is reflected at the macroscopic scale by behaviour which is generally well delimited and may be correctly described by simple laws: Coulomb's law for the frictional regime, a Bagnold-like law for the collisional regime, and Newton's law for the

Note présentée par Pierre-Gilles de GENNES.

lubricated (viscous) regime. The interplay of two interactions gives rise to more complicated behaviours, which are as yet poorly understood. Examples include the so-called frictional-collisional regime, which has been extensively studied during the recent years. In a similar manner, one might expect that a transition between the frictional and lubricated regimes occurs, although we know of no specific research into this possibility. The present work is a first attempt to show the existence of a frictional-viscous transition.

To that end, we carried out a series of experiments with a vane (which has a geometry adapted from the coaxial-cylinder rheometer, see [1, 3]) linked to a rate-controlled rheometer (Haake rotovisco MV5). Tests were performed with various mixtures of a Newtonian fluid (air, water, or glycerol-water mixture) and glass particles. The solid concentration was close to  $60 \pm 0,5 \%$ . Three bead radii were used:  $R = 0.15$  mm,  $R = 0.4$  mm, and  $R = 1$  mm. On *figure 1*, we have reported the long-term measured torque ( $C$ ) as a function of the vane velocity ( $\omega$ ) for various mixtures and flow depths. The shear stress may be inferred from the torque measurement using equation (1), which enables us to split the resulting torque into two contributions: a part  $C_s$  due to the flow resistance along the (imaginary) cylinder, and a further part  $C_e$  due to the flow resistance on the bottom (end effect). The estimation of the latter part may be achieved by carrying out tests with different flow depths: it is defined as the limit of the measured torque when the flow depth tends towards zero (*figure 2*).

In *figure 1*, we observe two types of behaviour. At low rates, the torque  $C_s$  is found to be a quadratic function of the flow depth and to be independent of the rate. Observations of the free surface suggested that shear was localised within a narrow band around the vane. At high rates, the torque is a linear function of the vane velocity and the flow depth. The mixture contained in the gap was fully sheared. In terms of stress, this means that a frictional (Coulombic) regime occurs at low rate while a viscous (Newtonian) regime takes place for high vane velocities.

We suggest the following explanation. At low rates, frictional contacts between particles predominate; at the macroscopic scale, it is natural to find Coulombic behaviour. For larger velocities, viscous forces are able to break direct contacts and lubricate them. Once most contacts are lubricated, one may expect a viscous behaviour at the macroscopic scale, as is usual for hard-sphere suspensions.

To test the reliability of this idea, we defined a dimensionless number ( $N$ ) as the ratio of the lubrication force [equation (3)] on the buoyant force acting on particles [equation (2)] at the depth  $h$  [equation (4)]. Accordingly, we expect the two following limiting behaviours to occur: when  $N \gg 1$ , lubrication contacts predominate and, at the macroscopic scale, the behaviour is Newtonian. Conversely, when  $N \ll 1$ , frictional contacts are predominant and, at the macroscopic scale, the behaviour is Coulombic.

On *figure 3*, we reported the data of *figure 1* in the form of a dimensionless rheogram: a dimensionless shear stress (ratio of the shear stress  $\tau$  on the effective normal stress  $\rho'gh$ , where  $\rho'$  is the buoyant density) has been used, and the dimensionless shear velocity  $\Omega = \mu\omega/\rho'gh$  has been reported in the abscissa. For glass beads of 0.8 mm in diameter, experimental data collapse approximately onto a single curve. The master curve is composed of two parts: a flat part corresponding to the Coulombic behaviour and a straight part of slope 1, pertaining to the Newtonian behaviour. The transition between these two limiting regimes takes place for values  $\Omega \approx 10^{-3}$ , namely for values  $N$  ranging from 0.25 to 1.25 (it has been assumed that the thickness of the lubrication layer ( $\varepsilon R$ ) ranges from 10 to 50  $\mu\text{m}$ ). This result substantiates the interpretation given above. For glass beads of 2 mm in diameter, the transition is observed for  $\Omega$  around  $10^{-5}$ , namely for  $N$  ranging from  $6 \cdot 10^{-3}$  to  $3 \cdot 10^{-2}$ . No sound explanation has been found to justify this discrepancy; the shortcoming might originate from arrangement effects, which were observed during our experiments.

In short, this experiment series provides clear evidence in support of the existence of a transition between a frictional regime and a viscous one for mixtures of particles within a sufficiently viscous

(Newtonian) fluid. We attempted to quantify this transition by using a dimensionless number  $N$ . Correct agreement was found for one size of beads only. This shows that the mechanisms underlying the transition are more complicated than our simple interpretation would suggest.

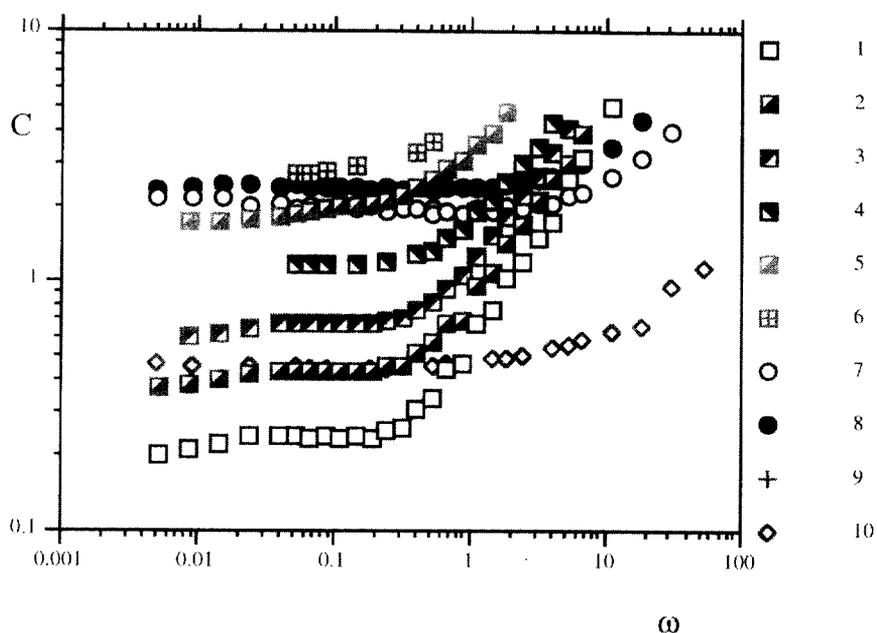
## 1. Problématique

Les suspensions très concentrées de particules solides dans un fluide newtonien sont associées à une grande variété de comportement. Cette diversité est liée en grande partie à l'existence de plusieurs types d'interaction entre particules, qui peuvent être concomitantes ou prédominantes. Dans le cas de particules non browniennes, c'est-à-dire de taille moyenne, suffisamment grandes pour ne pas être soumises aux interactions browniennes, il est commode de considérer trois types d'interaction : le frottement, la collision et le contact lubrifié. Les deux premiers types sont en fait apparentés, puisque ce sont des contacts directs, c'est-à-dire que les surfaces des particules se rapprochent à une distance inférieure à l'ordre de grandeur de la rugosité. Le contact se fait sur un nombre limité d'aspérités ; l'interaction résulte de la concomitance de différents mécanismes physiques (adhérence, déformation élastique ou élasto-plastique, etc.). Le troisième type d'interaction est le contact lubrifié, où les particules très proches sont soumises à une force répulsive due aux effets hydrodynamiques au sein de la couche de fluide entre les deux particules. La prédominance d'un type d'interaction par rapport aux autres se traduit à l'échelle macroscopique par un comportement type bien marqué et relativement bien décrit par des lois simples : loi de Coulomb pour le régime frictionnel, loi de type Bagnold pour le régime collisionnel et loi de Newton pour le régime lubrifié. La concomitance de deux interactions donne lieu à des comportements plus complexes et moins bien connus sur le plan théorique ou expérimental. Par exemple, la transition entre le régime frictionnel et le régime lubrifié n'a été l'objet d'aucune étude à notre connaissance. Ce travail constitue un premier essai pour mettre en évidence une telle transition et proposer un critère sous forme adimensionnelle afin de la quantifier.

## 2. Dispositif expérimental

Une série d'expériences a été réalisée sur divers mélanges de billes de verre dans des fluides newtoniens. Trois catégories de billes de verre (masse volumique  $\rho_p = 2\,460 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ont été utilisées : rayon ( $R$ )  $150 \pm 50 \mu\text{m}$ ,  $400 \pm 50 \mu\text{m}$  et  $1 \pm 0,05 \text{ mm}$ . Des essais ont été réalisés sur un triaxial pour déterminer l'angle de frottement interne du matériau :  $\varphi = 27,5^\circ \pm 0,5$ . Trois types de fluide ont été utilisés : un mélange à 98,5 % eau-glycérol de viscosité  $\mu = 0,96 \pm 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  (à  $20^\circ \text{C}$ ), de masse volumique  $\rho_f = 1\,260 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , de l'eau ( $\mu \approx 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ), et de l'air ( $\mu \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ). L'expérience a consisté à cisailier le mélange fluide-grains dans une cellule de cisaillement cylindrique à l'aide d'un scissomètre relié à un rhéomètre Haake Rotovisco MV5 à vitesse imposée. Le scissomètre est un croisillon métallique monté sur un axe ; c'est une géométrie empruntée à la mécanique des sols, qui est de plus en plus utilisée en rhéométrie des suspensions fluides et donne de bons résultats [1]. Le matériau étant piégé entre les pales, le cisaillement se fait autour du cylindre fictif au sein du mélange homogène. Cela atténue considérablement la déplétion de concentration près de la surface d'entraînement et le risque de glissement aux parois, qui existent avec des outils à surface métallique (même rugueuse) pour des suspensions très concentrées. Le rayon des pales était de  $R_1 = 30,0 \text{ mm}$ . Le diamètre de la cellule était de  $R_2 = 55,0 \text{ mm}$ . Le mélange a été préparé à la

concentration de  $60,5 \pm 0,5 \%$  et disposé dans la cellule ; le scissomètre était ensuite descendu jusqu'à pénétrer une certaine épaisseur ( $h$ ) du mélange. L'expérience a consisté à mesurer le couple de frottement ( $C$ ) exercé sur le scissomètre en fonction de sa vitesse de rotation ( $\omega$ ) pour différentes épaisseurs. Une fois la vitesse du rhéomètre imposée, le couple était enregistré pendant une vingtaine de minutes. Chaque valeur de couple correspond à la valeur mesurée à long terme pour éviter les effets de transition ordre/désordre liés à un changement de vitesse [2]. Il n'a pas toujours été possible de réaliser des expériences à grandes vitesses, soit parce que l'on atteignait la valeur maximale du couple mesurable (5 N·cm), soit parce que le matériau n'était plus simplement cisailé (turbulence, écoulements secondaires dus à l'inertie centrifuge). Les mesures sont reportées sur la *figure 1* en termes de relation entre le couple et la vitesse de rotation de l'appareil.



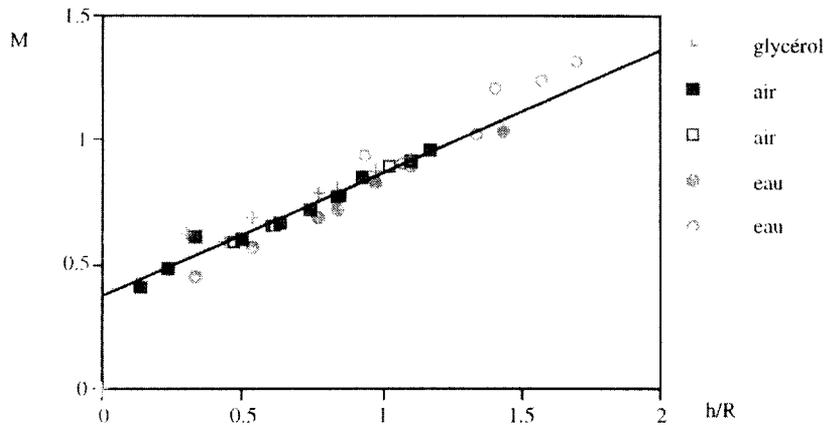
**Figure 1.** Couple  $C$  (en N·cm) et la vitesse de cisaillement  $\omega$  (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Essais 1 à 6 : billes de verre ( $R=0,4$  mm) dans du glycérol avec, comme hauteurs de cisaillement, respectivement  $h=9$  ; 14,8 ; 21 ; 30,7 ; 42,8 et 54,2 mm. Essais 7 et 8 : billes  $R=1$  mm dans de l'eau avec, comme hauteurs respectives, 28 et 33 mm. Essai 9 : billes  $R=0,15$  mm dans de l'air avec, comme hauteur, 30 mm. Essai 10 : billes  $R=0,4$  mm dans de l'eau avec, comme hauteur, 43 mm.

**Figure 1.** Torque  $C$  (N.cm) as a function of the vane velocity  $\omega$  ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Tests 1 to 6: glass beads ( $R=0,4$  mm) in a water-glycerol mixture with a flow depth respectively equal to:  $h=9$ , 14.8, 21, 30.7, 42.8, and 54.2 mm. Tests 7 and 8: beads ( $R=1$  mm) in water with a flow depth respectively 28 and 33 mm. Test 9: beads ( $R=0.15$  mm) in air with a flow depth 30 mm. Test 10: beads ( $R=0.4$  mm) in water with a flow depth  $h=43$  mm.

La contrainte de cisaillement peut être déduite du couple en supposant que celui-ci résulte du frottement sur la surface cylindrique verticale fictive découpée par les pales (rayon  $R_1$ , hauteur  $h$ ) et sur la base inférieure de ce cylindre fictif :

$$C = C_s + C_e \quad \text{avec} \quad C_s = 2 \pi h R_1^2 \tau \quad \text{et} \quad C_e = 2 \pi \int_0^{R_1} r^2 \tau dr \quad (1)$$

La contribution  $C_e$  correspond à un effet de bord. Pour l'évaluer, on peut suivre la méthode proposée par Barnes et Carnali [3], qui consiste à reporter sur un diagramme le couple en fonction de la hauteur adimensionalisée  $h/R$ . L'ordonnée à l'origine correspond au terme additionnel dû au frottement sur la base du cylindre. Cette méthode est correcte tant que la contrainte de cisaillement est indépendante de la contrainte normale. Cela n'est plus vrai en régime frictionnel (linéarité entre contraintes d'après la loi de Coulomb). Dans ce cas, il suffit d'adapter la procédure précédente en reportant le couple par unité de hauteur en ordonnée (à la place du couple). On reporte sur la *figure 2* un exemple d'application de cette procédure dans le cas de mélanges de billes de diamètre 0,8 mm (dans différents fluides interstitiels) cisailés à faible vitesse ( $\omega = 0,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ). La juste évaluation des effets de bord exige donc que l'on connaisse le régime d'écoulement de la suspension.



**Figure 2.** Couple de frottement adimensionnel  $M = C/2 \pi \rho' g h R^3$  (mesuré à  $\omega = 0,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) en fonction de la hauteur cisailée  $h/R$  pour différents mélanges de billes de verre ( $R = 0,4 \text{ mm}$ ) dans différents fluides. Deux cellules ont été utilisées :  $R = 100 \text{ mm}$  ( $\circ, \square$ ) et  $R = 55 \text{ mm}$  ( $\bullet, \blacksquare$ ). La droite représente le calage des points par un modèle linéaire.

**Figure 2.** Dimensionless torque  $M = C/2 \pi \rho' g h R^3$  (measured at  $\omega = 0.7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) versus dimensionless depth  $h/R$  for various mixtures made up of glass beads ( $R = 0.4 \text{ mm}$ ) within a Newtonian fluid.

### 3. Résultats expérimentaux et interprétation

On note sur la *figure 1* deux types de comportement en fonction de la vitesse.

- Aux faibles vitesses, le couple par unité de hauteur ( $C/h$ ) ne dépend quasiment pas de la vitesse et dépend linéairement de la hauteur cisailée (*figure 2*). Nous avons également observé que le cisaillement était limité à une mince couche (de quelques diamètres de particule d'épaisseur) autour du scissomètre et qu'il n'y avait pas de variation significative du niveau de la surface libre, hormis au tout début du mouvement (dilatance). Les fluctuations de contraintes sont importantes aux faibles vitesses (amplitude de l'ordre de 5 à 8 %) et diminuent lentement lorsque la vitesse augmente (moins de 1 % aux plus fortes vitesses). Traduit en termes de contrainte, cela veut dire que la contrainte de cisaillement est indépendante du taux de cisaillement mais dépend linéairement de la contrainte normale verticale. Il s'agit donc typiquement d'un comportement frictionnel coulombien.
- Aux fortes vitesses, le couple par unité de hauteur est une fonction linéaire de la vitesse et ne dépend plus de la hauteur. Des observations de la surface libre suggèrent que le cisaillement affecte tout le

matériau dans l'entrefer. On en déduit que la contrainte de cisaillement est une fonction linéaire du taux de cisaillement ; on a donc affaire à un comportement newtonien.

Nous proposons l'explication suivante de la transition d'un régime frictionnel à un régime visqueux. Aux faibles vitesses de cisaillement, les particules sont en contact direct les unes avec les autres. Le frottement solide entre particules permet de distribuer la force de pesanteur le long du réseau de particules en contact. La dissipation visqueuse est négligeable par rapport à la dissipation frictionnelle. À l'échelle macroscopique, il est donc naturel de trouver un comportement frictionnel de type Coulomb marqué par une dépendance de la contrainte de cisaillement vis-à-vis de la contrainte normale verticale et une très faible influence du taux de cisaillement. La désorganisation continue du réseau de contacts au cours du cisaillement peut expliquer les fluctuations importantes de contraintes. À partir d'une certaine vitesse, les forces visqueuses sont capables de lubrifier les contacts entre grains. Le réseau de contacts cesse alors progressivement d'exister. Une fois que tous les contacts sont lubrifiés, le comportement à l'échelle macroscopique est entièrement gouverné par la dissipation visqueuse et il est donc naturel de retrouver un comportement newtonien comme pour les suspensions concentrées (en l'absence d'interactions colloïdales). Il est attendu un changement négligeable de volume consécutif à la lubrification compte tenu de la faible épaisseur de la couche lubrifiée.

Pour vérifier le bien-fondé de notre analyse, examinons en première approximation ce qui se passe quantitativement. En suivant la décomposition usuellement pratiquée en mécanique des sols, on peut écrire que la contrainte (dite effective) supportée par le squelette solide est obtenue en retranchant à la contrainte totale la pression interstitielle, soit :  $\sigma' = \rho'g(h - y)$ , avec  $\rho' = \phi(\rho_p - \rho_f)$  la masse volumique déjaugée. La force moyenne de pesanteur qui s'exerce sur une particule à la profondeur  $h$  est en moyenne proportionnelle à :

$$F_p = \rho'ghR^2 \quad (2)$$

La force de lubrification entre deux particules sphériques peut s'écrire au premier ordre :

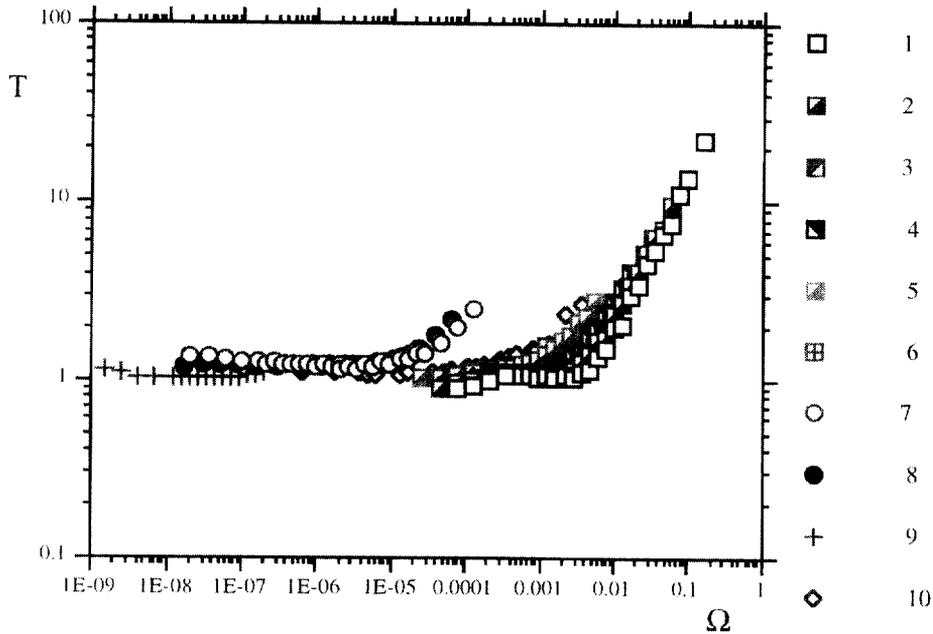
$$F_{\text{lub.}} = \frac{3\pi}{2} \mu R^2 \frac{U}{\varepsilon R} \quad (3)$$

où  $\varepsilon R$  est la distance entre particules,  $U$  la vitesse de rapprochement de deux particules, estimée être de l'ordre de  $2R\dot{\gamma}$ , et  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement. Le rapport des deux forces nous donne le nombre adimensionnel suivant :

$$N = \frac{6\pi}{\phi\varepsilon} \frac{\mu\dot{\gamma}}{(\rho_p - \rho_f)gh} \quad (4)$$

Lorsque  $N \gg 1$ , les forces de lubrification sont capables de lubrifier les contacts sur toute la hauteur ; lorsque  $N \ll 1$ , les contacts entre particules sont directs. Notons que le nombre  $N^{-1}$  est formellement identique au nombre  $A$  utilisé par Acrivos et al. [4] pour décrire la resuspension visqueuse dans une cellule de Couette. Cela suggère peut-être que la transition frictionnelle-visqueuse serait gouvernée par un mécanisme similaire à celui de la resuspension.

Sur la *figure 3*, nous avons reporté les données de la *figure 1* sous forme d'un rhéogramme (adimensionnel). Placée en ordonnée, la contrainte de cisaillement a été divisée par  $\rho'gh$ . En première approximation, nous avons estimé le taux de cisaillement comme proportionnel à  $\omega$  et en conséquence, nous avons utilisé la vitesse de cisaillement adimensionnelle  $\Omega = \mu\omega/\rho'gh$  comme abscisse.



**Figure 3.** Contrainte de cisaillement adimensionnelle  $T = \tau/\rho'gh$  et vitesse de cisaillement adimensionnelle  $\Omega = \mu\omega l/\rho'gh$ . La droite indique la pente 1. Même légende que pour la *figure 1*.

**Figure 3.** Dimensionless shear stress  $T = \tau/\rho'gh$  versus dimensionless vane velocity  $\Omega = \mu\omega l/\rho'gh$ . The reported line indicates the slope 1. For captions, see figure 1.

On observe sur la *figure 3* une courbe maîtresse pour les billes de 0,8 mm de diamètre. Une transition entre un comportement typiquement coulombien et un autre newtonien intervient pour pour  $\Omega \approx 10^{-3}$ . Comme la distance  $\varepsilon R$  à partir de laquelle les effets de la force de lubrification deviennent significatifs est en général de l'ordre de 10–50  $\mu\text{m}$  (cela dépend de la rugosité de la surface [5]), on en déduit que cette transition est associée à des valeurs de  $N = \Omega 6 \pi(\varepsilon\phi)$  comprises entre 0,25 et 1,25. Pour des billes de 2 mm de diamètre, la transition vers le régime visqueux intervient pour des valeurs de  $N$  comprises entre  $6 \cdot 10^{-3}$  et  $3 \cdot 10^{-2}$ , soit des valeurs environ 100 fois inférieures aux précédentes. Elle se fait plus lentement que pour les billes de 0,8 mm : en effet, pour ces dernières, le régime visqueux caractérisé par une pente  $d \log T/d \log \Omega = 1$  est atteint en à peu près une décade (entre  $\Omega \approx 10^{-3}$  et  $\Omega \approx 10^{-2}$ ), ce qui est très loin d'être le cas pour les billes de 2 mm. Cela montre que la transition vers le régime visqueux est un peu plus complexe que l'analyse en première approximation proposée ici ne le suggère. Des effets d'arrangement ou de rugosité sont peut-être à l'origine de cet écart. Entre autres, il a été observé que l'arrangement en couches concentriques était bien plus régulier pour les billes de 2 mm que les billes de 0,8 mm (à cause du calibrage des billes), ce qui pourrait expliquer une apparition plus précoce du régime visqueux.

#### 4. Conclusion

L'expérience présentée ici montre d'abord que le comportement à l'échelle macroscopique des suspensions concentrées dépend fortement des interactions à l'échelle microscopique. Ainsi, pour une même concentration solide, deux types de comportement bien distincts existent selon le type d'inter-

**C. Ancey, P. Coussot**

action prédominant. Elle montre aussi que la transition se fait sur une gamme de vitesses de cisaillement relativement étroite, qui peut être estimée en première approximation par le nombre adimensionnel  $N$ , défini comme le rapport entre la force de lubrification et le poids déjaugé. Toutefois, nous avons noté l'influence de la taille des particules, qui n'est pas encore clairement comprise.

### Références bibliographiques

- [1] Nguyen Q.D., Boger D.V., Measuring the flow properties of yield stress fluids, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 24 (1992) 47–88.
- [2] Gondret P., Petit P., Viscosité des suspensions désordonnées et ordonnées de sphères solides : expériences et modèles, *C. R. Acad. Sci. Paris, série II b* 321 (1995) 25–31.
- [3] Barnes H.A., Carnali J.O., The vane-in-cup as a novel rheometer geometry for shear thinning and thixotropic materials, *J. Rheol.* 34 (1990) 851–866.
- [4] Acrivos A., Mauri R., Fan X., Shear-induced resuspension in a Couette device, *J. Rheol.* 19 (1993) 797–802.
- [5] Smart J.R., Leighton D.T., Measurement of the hydrodynamic surface roughness of non-colloidal spheres, *Phys. Fluids A* 1 (1993) 52–60.